UTN HAEDO
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

Ejercicios	*1*		*2*		*3*		*4*		*5*		*Nota*
	a	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*B*	*a*	*b*	

Nombre y Apellido: **...**
Correo: **...**
Curso: Anual ***Fecha:26/08/25***

1er Parcial de Análisis Matemático II

Ejercicio 1a) *Hallar la solución general de la ecuación diferencial* $\frac{d^2y(x)}{dx^2} - y(x) = e^{2x} - x^2$

Ejercicio 1b) *Si* $y = 2x$ *es una solución de la ED homogénea asociada a* $y' + k\frac{y}{x} = 2x^2$*, encuentra el valor de* k*. Para el valor de k obtenido, determina la solución general de la ED.*

Ejercicio2a) *Dada la siguiente función* $f(x,y) = \begin{cases} (y^2+x^2)Cos\left(\frac{3}{y^2+x^2}\right) & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Se pide analizar si la función es diferenciable en el origen .¿Cuál es su interpretación geométrica en caso que lo sea?

Ejercicio 2b) *¿Tiene derivada en cualquier dirección y sentido a partir del origen? Justificar la respuesta.*

Ejercicio 3a) *Dado el sistema* $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ x^2+y^2-x=0 \end{cases}$ *indica si* $y = y(x)$ *y* $z = z(x)$ *define un sistema de funciones en forma implícita en el punto* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *. Justificar la respuesta*

Ejercicio 3b) *En caso afirmativo, calcular las derivadas a partir del sistema dado.*

Ejercicio 4a) *Si* $z = h(x,y)$ *está definida implícitamente por* $xz + z + y + Ln(z - x\,y) - 10 = 0$ *en un entorno del punto* $(2, 1h(2,1))$*, la recta normal al gráfico de* h *en el punto* $(2, 1h(2,1))$*,¿Es paralela a la recta* $r \equiv \begin{cases} 2x+y=8 \\ z=3 \end{cases}$ *?*

Ejercicio 4b) *Dada la función* $f(x,y) = y\,h(x)$ *con* $h(x)$ *derivable .Determinar el valor y la dirección de la derivada direccional máxima de* $f(x,y)$ *en el punto* $(1,1)$ *siendo* $h(x)$*la solución particular de la ED.*

$x\,h'(x) - (1+3x)h(x) = 0$ *con* $h(1) = e^3$

Ejercicio 5a) *Hallar la distancia mínima y máxima de la cónica* $10x^2 + 12\,x\,y + 10y^2 = 32$ *al origen de coordenadas utilizando el método de Joseph Lagrange.*

Ejercicio 5b) *Explique la interpretación geométrica del método de Joseph Lagrange (condición necesaria)*

AM2 FRH	1º parcial	HOJA Nº 1/4 — FECHA 26-8-25

EJ 1 a) Hallar la sol. gral. de la ec. $\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - y(x) = e^{2x} - x^2$

$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = y'' \rightarrow y'' - y = e^{2x} - x^2$

SH) $r^2 - 1 = 0 \longrightarrow r_{1,2} = 1$ (raíz doble) $\boxed{y_H = Ae^x + Bxe^x}$

SP) $y_P = Ce^{2x} + Dx^2 + Ex + F$

$y'_P = 2Ce^{2x} + 2Dx + E$

$y''_P = 4Ce^{2x} + 2D$

$4Ce^{2x} + 2D - Ce^{2x} - Dx^2 - Ex - F = e^{2x} - x^2$

$$e^{2x}\underbrace{(4C - C)}_{1=3C} + x^2\underbrace{(-D)}_{-1} + x\underbrace{(-E)}_{0} + \underbrace{(2D - F)}_{0} = e^{2x} - x^2 + 0x + 0$$

$C = 1/3 \quad D = 1 \quad E = 0 \quad 2\overset{1}{D} = F \rightarrow F = 2$

$\boxed{y_P = \frac{1}{3}e^{2x} + x^2 + 2}$

$$\boxed{y(x) = A e^x + Bxe^x + \frac{1}{3}e^{2x} + x^2 + 2}$$

1-b) Si $y = 2x$ es solución de la homogenea asoc. a $y' + k\frac{y}{x} = 2x^2$, encontrar el valor de k. Con ese k hallar la sol. gral de la ED

$y = 2x \rightarrow y' = 2 \longrightarrow 2 + k \cdot \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 0 \rightarrow 2 + k2 = 0 \rightarrow \boxed{k = -1}$

$y' - \frac{y}{x} = 2x^2 \rightarrow$ SH) $y = 2x$

Variación de parámetros: $y = 2x\, V(x) \rightarrow y' = 2V(x) + 2xV'(x)$

$\cancel{2V(x)} + 2xV'(x) - \frac{\cancel{2xV(x)}}{\cancel{x}} = 2x^2 \rightarrow \cancel{2x}V'(x) = \cancel{2}x^{\cancel{2}} \rightarrow V'(x) = x$

$V'(x) = x \rightarrow \boxed{V(x) = \frac{x^2}{2} + C} \longrightarrow \boxed{y = 2x\left(\frac{x^2}{2} + C\right)}$

NOTA

EJ 2) a) Dada la sig función $f(x,y) = \begin{cases} (y^2+x^2)\cos\left(\dfrac{3}{y^2+x^2}\right) & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Se pide analizar si la función es diferenciable en el origen. ¿Cuál es su interpretación geométrica en caso que lo sea?

si $\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\Delta z - dz}{\rho} = 0 \Rightarrow f$ es diferenciable

- $dz \to z'_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \underbrace{(0^2+(0+\Delta x)^2)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos\left(\dfrac{3}{0^2+(0+\Delta x)^2}\right)}_{acot} = 0$

$z'_y(0,0) = \lim\limits_{\Delta y\to 0} ((0+\Delta y)^2+0^2)\cos\left(\dfrac{3}{(0+\Delta y)^2+0^2}\right) = 0$ acot x 0

$\to dz = 0\,dx + 0\,dy$

- $\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\Delta z}{\rho} = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{1}{\rho}(\Delta x^2+\Delta y^2)\cos\left(\dfrac{3}{\Delta y^2+\Delta x^2}\right)$

$= \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{1}{\rho}\underbrace{(\rho^2 sen^2(\varphi)+\rho^2\cos^2(\varphi))}_{\rho^2(sen^2(\varphi)+\cos^2(\varphi))}\cos\left(\dfrac{3}{\rho^2 sen^2(\varphi)+\rho^2\cos^2(\varphi)}\right) =$

$= \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{1}{\cancel{\rho}} \underbrace{\rho^{\cancel{2}}}_{\to 0} \underbrace{\cos\left(\dfrac{3}{\rho^2}\right)}_{acot} = 0$ (acotado x 0)

$\boxed{\text{f es diferenciable en } (0,0)}$

$\Rightarrow$ f admite plano tangente en $(0,0,f(0,0))$

b) ¿tiene derivada en cualquier dirección y sentido a partir del origen?

f es derivable en toda dirección pues f es diferenciable en (0,0)

diferenciabilidad $\Rightarrow$ derivabilidad

NOTA

EJ 3 a) Dado el sist. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ x^2+y^2-x=0 \end{cases}$ indicar si $y=y(x)$ y $z=z(x)$ define un sist de funciones en forma implícita en $\underbrace{(1/2, 1/2, \sqrt{2}/2)}_{P}$

$$\begin{cases} F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 \\ G(x,y,z) = x^2+y^2-x \end{cases}$$

- $F(1/2, 1/2, \sqrt{2}/2) = 0$ ✓ $F \in C^1$ ✓
- $G(1/2, 1/2, \sqrt{2}/2) = 0$ ✓ $G \in C^1$ ✓
- $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -4yz \rightarrow \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P) = -\sqrt{2} \neq 0$ ✓

variables DEPENDIENTES

$\boxed{\text{Se cumplen las hipótesis del TFI}}$ ✓

3b) En caso afirmativo, calcular las derivadas a partir del sistema dado.

Hay que derivar F y G con respecto a x, considerando a y y z como funciones e igualarlos a cero:

$$\begin{cases} F'_x = 2x + 2y\, y'(x) + 2z\, z'(x) = 0 \\ G'_x = 2x - 1 + 2y\, y'(x) = 0 \end{cases}$$

$$F'_x(1/2, 1/2, \sqrt{2}/2) = 1 + y'(x) + \sqrt{2}\, z'(x) = 0 = 1 + 0 + \sqrt{2}\, z'(x)$$

$$G'_x(1/2, 1/2, \sqrt{2}/2) = \cancel{1} - \cancel{1} + y'(x) = 0 \rightarrow \boxed{y'(x) = 0}$$

$$\boxed{z'(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}}}$$

NOTA

$\boxed{\text{EJ 4}}$ a) Si $z = h(x,y)$ está definida implícitamente por

$S: xz + z + y + \ln(z - xy) - 10 = 0$ en un entorno del

P → punto $(2, 1, h(2,1))$, la recta normal al gráfico de h

en ↗ ¿es paralela a $r: \begin{cases} 2x + y = 8 \\ z = 3 \end{cases}$?

$G(x,y,z) = xz + z + y + \ln(z - xy) - 10$

$\underbrace{\text{S es sup. de nivel 0 de G}}$

$$\nabla G(x,y,z) = \left(z - \frac{y}{z-xy},\ 1 - \frac{x}{z-xy},\ x + 1 + \frac{1}{z-xy}\right) \quad N_S \parallel \nabla G_{(x,y,z)}$$

$$P \in S \Rightarrow (2, 1, \underbrace{\overset{z_0}{h(2,1)}}_{3}) \in S: \underbrace{2z_0 + z_0 + 1 + \ln(z_0 - 2) - 10 = 0}_{z_0 = 3 \text{ cumple}}$$

→ busco z para que $z_0 - 2 = 1$ → $\ln(1) = 0$

$\boxed{P = (2, 1, 3)}$

$$\nabla G(2,1,3) = (2, -1, 4) \rightarrow \text{uso: } \boxed{N_{S_P} = (2, -1, 4)}$$

dirección de r: $\begin{cases} 2x + y = 8 \rightarrow N_1 = (2,1,0) \\ z = 3 \rightarrow N_2 = (0,0,1) \end{cases} \Big\rangle\ d_r = N_1 \times N_2 = (1, -2, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} r: \bar{\beta}(t) = (1,-2,0)t + (2,1,3) \\ N_S: \bar{\gamma}(t) = (2,-1,4)t + (2,1,3) \end{array}\right\} \boxed{\text{r y } N_S \text{ tienen direcciones NO paralelas}}$$

No son paralelas

AM2 PRH	1º parcial	HOJA Nº 3/4 FECHA 26-8-25

Ej 4 b) Dada la función $f(x,y) = y\, h(x)$ con $h(x)$ derivable. Determinar el valor y la dirección de la derivada direccional máxima de $f(x,y)$ en $(1,1)$ siendo $h(x)$ la sol particular de:

$$x\, h'(x) - (1+3x)\, h(x) = 0 \quad \text{con } h(1) = e^3$$

$$x\, h'(x) = (1+3x)\, h(x)$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1+3x}{x}\, h(x)$$

$$\frac{1}{h(x)}\, dh = \left(\frac{1}{x} + 3\right) dx \xrightarrow{\text{integro m.a.m.}} \ln(h) = \ln(x) + 3x + c$$

$$e^{\ln(h)} = e^{\ln(x) + 3x + c}$$

$$\boxed{h(x) = x \cdot e^{3x}\, k}$$

$$h(1) = e^3 = 1\, e^{3 \cdot 1}\, k \Rightarrow k = 1 \qquad \boxed{h(x) = x e^{3x}}$$

$$f(x,y) = y\, x e^{3x} \rightarrow \underline{f \text{ es diferenciable}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1)\Big|_{max} = \|\nabla f_{(1,1)}\|$$

y se da en la dirección del gradiente

$$\Rightarrow \vec{v} = \nabla f_{(1,1)}$$

$$f'_x = y e^{3x} + y x\, 3 e^{3x} \longrightarrow f'_x(1,1) = 4e^3$$

$$f'_y = x e^{3x} \longrightarrow f'_y(1,1) = e^3$$

$$\nabla f_{(1,1)} = (4e^3, e^3)$$

$$\boxed{\vec{v}_{max} = (4e^3, e^3)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1)\Big|_{max} = \sqrt{(4e^3)^2 + (e^3)^2} = \sqrt{16e^6 + e^6} = \sqrt{17e^6}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1)\Big|_{max} = e^3\sqrt{17}}$$

NOTA

EJ 5 a) Hallar la distancia mínima y máxima de la cónica $10x^2+12xy+10y^2=32$ al origen de coord utilizando método de Lagrange

Función distancia $= f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ pero para optimizar se puede usar f^2 para hallar los puntos y luego calcular el valor con f

$g(x,y) = x^2+y^2 \rightarrow$ función a optimizar

$10x^2+12xy+10y^2-32=0 \rightarrow$ restricción $\rightarrow 5x^2+6xy+5y^2-16=0$

$$L(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(5x^2+6xy+5y^2-16)$$

$$\begin{cases} L'_x=0 = 2x+\lambda(10x+6y) \rightarrow \lambda = \dfrac{-2x}{10x+6y} \\ L'_y=0 = 2y+\lambda(6x+10y) \rightarrow \lambda = \dfrac{-2y}{6x+10y} \\ L'_\lambda=0 = 5x^2+6xy+5y^2-16 \; (*) \end{cases} \quad \lambda=\lambda$$

$$\frac{\cancel{-}2x}{10x+6y} = \frac{\cancel{-}2y}{6x+10y}$$

$$x(6x+10y) = y(10x+6y)$$

$$6x^2+\cancel{10xy} = \cancel{10xy}+6y^2$$

$$x^2=y^2 \rightarrow \boxed{y=\pm x}$$

$(*)$ $\boxed{y=x}$: $0=5x^2+6xx+5x^2-16$

$16x^2=16 \rightarrow |x|=1 \rightarrow$ $P_1=(1,1)$, $P_2=(-1,-1)$

$(*)$ $\boxed{y=-x}$ $0=5x^2+\overbrace{6x(-x)}^{-6x^2}+5(-x)^2-16$

$4x^2=16 \rightarrow |x|=2 \rightarrow$ $P_3=(2,-2)$, $P_4=(-2,2)$

$f_{(1,1)} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} = f_{(-1,-1)}$

$f(2,-2) = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2} = f(-2,2)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Dist mínima} = \sqrt{2} \\ \text{dist máxima} = 2\sqrt{2} \end{array}}$$

NOTA

AM2 FRH	1° parcial	HOJA N° 4/4 FECHA 26-8-25

$\boxed{EJ\ 5}$ b) Explicar la interpretación geométrica del método de Lagrange (condición necesaria)

El método de Lagrange permite encontrar extremos locales de una función sujeta a una restricción.
La condición necesaria para que un punto del dominio de f sea extremo es que el gradiente de f sea proporcional (paralelo) al gradiente de la restricción.

NOTA